

ALINA PARASCHIVA
SILVIU DĂNEȚ

matematică
Formule și
noțiuni generale
clasele
V-VIII

Ediția a II-a

CORINT

www.cartepedia.ro

Redactare: **Alice Raluca Petrescu**

Tehnoredactare: **Andrei Cîrtoaje**

Coperta: **Walter Riess**

Date despre autori:

GABRIELA ALINA PARASCHIVA — profesor gradul I la Colegiul Național „Gheorghe Lazăr” din București, coautor la auxiliare școlare pentru clasele V-VIII, autor de articole în reviste de specialitate.

SILVIU DĂNEȚ — profesor gradul II la Grupul Școlar Agricol „Viaceslav Harnaj” din București, coautor la auxiliare școlare pentru clasele V-VIII, autor de articole în revista „Arhimede”.

Referent: **LILIANA FLORICA VÎÎIANU** — profesor la Școala Generală nr. 70, sector 3, București.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

PARASCHIVA, ALINA

Matematică: formule și noțiuni generale: clasele V-VIII / Alina

Paraschiva, Silviu Dăneț.- Ed. a 2-a. - București: Corint, 2008

ISBN 978-973-135-428-6

I. Dăneț, Silviu

51(075.33)(083.5)

Difuzare și Clubul cărții :

Calea Plevnei nr. 145, sector 6, cod poștal 060012, București

Tel.: 021.319.88.22; 021.319.88.33; Fax: 021.319.88.66

E-mail: vanzari@edituracorint.ro

Magazin virtual: www.edituracorint.ro

ISBN: 978-973-135-428-6

Format: 32/ 61 × 86; Coli tipo: 4

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate Editurii CORINT, parte componentă a GRUPULUI EDITORAL CORINT.

Tiparul executat la: FED PRINT S.A.

www.cartepedia.ro

Prefață

Pregătirea elevilor la matematică, atât la clasă, cât și în vederea susținerii unor examene și concursuri, trebuie să pornească de la cunoașterea, înțelegerea și reținerea noțiunilor teoretice, fără de care orice problemă rămâne o „enigmă nerezolvată”.

Lucrarea este organizată în două părți, corespunzătoare celor două ramuri ale studiului matematicii în clasele V-VIII — algebră și geometrie —, și realizează o trecere în revistă a tuturor noțiunilor de matematică incluse în programa școlară din curriculum nucleu și curriculum aprofundat pentru gimnaziu. Noțiunile sunt structurate și incluse în capitole, conform materiei studiate, astfel încât elevul să se poată orienta ușor și, totodată, să aibă la dispoziție tot arsenalul teoretic necesar, însoțit de exemplificări prin câteva exerciții.

Considerăm că prezenta lucrare este un auxiliar didactic util și eficient, atât pentru elevi, cât și pentru profesori, pentru activitatea curentă desfășurată acasă sau în clasă, dar și pentru examene, reușind să acopere, în totalitate, într-o formă sintetică, conținuturile programei de matematică pentru gimnaziu.

Autorii

Cuprins

Prefață	3
---------------	---

ALGEBRĂ

I. Mulțimea numerelor naturale	5
1. Operații cu numere naturale	5
2. Compararea și ordonarea numerelor naturale	7
3. Factor comun	7
4. Puterea unui număr natural	8
5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	9
6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10) ...	10
7. Divizibilitatea	10
II. Propoziții și mulțimi	13
1. Propoziții	13
2. Mulțimi	14
III. Mulțimea numerelor întregi	16
1. Noțiuni generale	16
2. Operații cu numere întregi	17
IV. Mulțimea numerelor raționale	19
1. Noțiuni generale. Frații	19
2. Amplificarea și simplificarea fracțiilor	20
3. Aducerea fracțiilor la același numitor	20
4. Opusul unei fracții	21
5. Operații cu fracții	21
6. Frații ordinare și fracții zecimale	23
V. Mulțimea numerelor reale	25
1. Noțiuni generale	25
2. Radicali	25
3. Intervale de numere reale	26

4. Rapoarte, procente și proporții	27
5. Medii	30
6. Mărimi proporționale	31
7. Calcul algebric	34
VI. Ecuații	37
1. Ecuația de gradul întâi cu o necunoscută	37
2. Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută	37
VII. Inecuația de gradul întâi cu o necunoscută	39
1. Noțiuni generale	39
2. Rezolvarea inecuațiilor	39
VIII. Ecuații și sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute	40
1. Ecuații de gradul întâi cu două necunoscute	40
2. Sisteme de ecuații de gradul întâi cu două necunoscute	40
IX. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor	44
X. Funcții	45
1. Noțiuni generale	45
2. Funcția liniară	45

GEOMETRIE

I. Unghiul	51
1. Noțiuni generale	51
2. Clasificarea unghiurilor	52
II. Triunghiul	56
1. Noțiuni generale	56
2. Construcția triunghiurilor	56
3. Clasificarea triunghiurilor	58
4. Linii importante în triunghi	59

5. Proprietăți ale triunghiurilor	61
6. Congruența și asemănarea triunghiurilor	65
7. Rezultate importante în asemănarea triunghiurilor ...	69
8. Teoreme importante în triunghiuri oarecare	70
9. Teoreme importante în triunghiuri dreptunghice ..	73
10. Rapoarte constante în triunghiurile dreptunghice (elemente de trigonometrie)	75
11. Valori particulare ale funcțiilor trigonometrice	76
12. Formule pentru aria triunghiului	76
III. Patrulater	79
1. Noțiuni generale	79
2. Paralelogramul	79
3. Trapezul	83
4. Perimetrul și aria patrulaterelor studiate	84
IV. Linia mijlocie în triunghi și trapez	86
V. Cercul	88
1. Noțiuni generale	88
2. Poziții relative ale unei drepte față de un cerc	89
3. Poziții relative a două cercuri	90
4. Unghiuri construite relativ la cerc	92
5. Teoreme referitoare la arce și coarde	95
6. Figuri geometrice înscrise în cerc	96
7. Poligoane regulate	98
8. Lungimi și arii întâlnite în cerc	99
VI. Unghiul a două drepte în plan și spațiu	101
VII. Perpendicularitate în plan și spațiu	104
1. Noțiuni generale	104
2. Teoreme relative la perpendicularitate	104

3. Proiecții de puncte, segmente și drepte	105
4. Unghi diedru; unghi plan diedru	108
5. Teorema celor trei perpendiculare	109
VIII. Prisma	111
1. Noțiuni generale	111
2. Prisma dreaptă	111
IX. Piramida	114
1. Noțiuni generale	114
2. Piramida regulată	114
X. Trunchiul de piramidă regulată	117
1. Aria și volumul trunchiului de piramidă regulată...	117
2. Cazuri particulare de trunchiuri	118
XI. Ariile și volumele corpurilor rotunde	120
1. Cilindrul circular drept	120
2. Conul circular drept	120
3. Trunchiul de con circular drept	121
4. Sfera	121
XII. Unități de măsură	122
1. Unități de măsură pentru lungime	122
2. Unități de măsură pentru arie	122
3. Unități de măsură pentru volum	123
4. Unități de măsură pentru masă	124
5. Unități de măsură pentru timp	124

ALGEBRĂ

Capitolul I

Mulțimea numerelor naturale

Simbolurile 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 se numesc **cifre**.

Numerele scrise astfel 0, 1, 2, ..., 9, 10, 11, ... formează **șirul numerelor naturale**.

Observație. Șirul numerelor naturale este infinit.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Numerele naturale sunt:

- **pare** – se împart exact la 2, se notează $n = 2k, k \in \mathbb{N}$;
- **împare** – nu se împart exact la 2, se notează $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

1. Operații cu numere naturale

1.1. Adunarea

termen + termen = sumă

Proprietățile adunării numerelor naturale:

- a) Comutativitatea: $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.
- b) Asociativitatea: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- c) Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 0 este element neutru față de adunare.)

1.2. Scăderea

descăzut – scăzător = diferență

$a - b = c, \forall a, b \in \mathbb{N}, a \geq b$.

Proba scăderii: $a = b + c$.

1.3. Înmulțirea

deînmulțit · înmulțitor = produs

Notatie: În loc de semnul „ $\cdot$ ” care simbolizează înmulțirea se folosește și „ $\times$ ”.

Proprietățile înmulțirii numerelor naturale:

- a) Comutativitatea: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.
- b) Asociativitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- c) Elementul neutru: $a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{N}$. (Numărul natural 1 este element neutru față de înmulțire.)
- d) $a \cdot 0 = 0, \forall a \in \mathbb{N}$.
- e) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- f) Distributivitatea înmulțirii față de scădere:
 $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}, b > c$.

1.4. Împărțirea

deîmpărțit : împărțitor = cât

$$a : b = c, \forall a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0.$$

$$\text{Proba împărțirii: } a = b \cdot c.$$

$$\text{Observație: } 0 : b = 0, \forall b \in \mathbb{N}, b \neq 0.$$

Teorema împărțirii cu rest

Oricare ar fi numerele naturale a și b , $b \neq 0$, numite **deîmpărțit** și, respectiv, **împărțitor**, există două numere naturale q și r , numite **cât** și, respectiv, **rest**, astfel încât

$$a = b \cdot q + r, r < b.$$

Numerele q și r , determinate în aceste condiții, sunt *unice*.

2. Compararea și ordonarea numerelor naturale

Pentru orice două numere naturale a și b există una și numai una dintre următoarele relații:

	$a < b$	a mai mic decât b
sau	$a = b$	a egal cu b
sau	$a > b$	a mai mare decât b

Pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$ avem următoarele relații:

- $a \leq b$ dacă și numai dacă $a < b$ și $a = b$;
- $a \geq b$ dacă și numai dacă $a > b$ și $a = b$.

Egalitatea și inegalitatea numerelor naturale au proprietatea de *tranzitivitate*:

- Dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \leq b$ și $b \leq c$, atunci $a \leq c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a \geq b$ și $b \geq c$, atunci $a \geq c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
- Dacă $a = b$ și $b = c$, atunci $a = c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

Relațiile $<, \leq, >, \geq$ sunt *relații de ordine* și ordonează *numerele naturale*.

3. Factor comun

Pentru orice numere naturale a, b și c avem:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c) \text{ și}$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c), \text{ cu } b > c.$$

4. Puterea unui număr natural

Definiții:

◆ Se numește **puterea a n-a a numărului natural a** numărului a^n dat prin $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ori}}, n \geq 2, a, n \in \mathbb{N}$,

unde: a – se numește **baza puterii**;

n – se numește **exponentul puterii**.

◆ Operația matematică prin care se obține puterea unui număr se numește **ridicare la putere**.

4.1. Reguli de calcul cu puteri

Pentru orice $a \in \mathbb{N}$ și orice $m, n \in \mathbb{N}$ avem:

1. $a^1 = a, \forall a \in \mathbb{N}^*$;
2. $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{N}^*$;
3. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \forall a \in \mathbb{N}^*$;
4. $a^m : a^n = a^{m-n}, \forall a \in \mathbb{N}^*, m \geq n$;
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}, \forall a \in \mathbb{N}^*$;
6. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$;
7. $(a : b)^n = a^n : b^n, \forall a, b \in \mathbb{N}^*$;
8. $a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \forall a \in \mathbb{N}^*$.

Observație: 0^0 nu se poate efectua.

Definiție: Puterea a doua a unui număr natural se mai numește și **pătratul** acelui număr.

4.2. Compararea puterilor

◆ Dintre două puteri care au aceeași bază, este mai mare puterea care are exponentul mai mare.

$$a^n > a^m \Leftrightarrow n > m, \forall a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

♦ Două puteri care au aceeași bază sunt egale dacă au exponenți egali.

$$a^n = a^m \Leftrightarrow n = m, \forall a \in \mathbb{N}^*, n, m \in \mathbb{N}.$$

♦ Dintre două puteri cu baze diferite, dar având același exponent (diferit de zero), este mai mare puterea care are baza mai mare.

$$a^n < b^n \Leftrightarrow a < b, \forall a, b \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Dacă într-o expresie există paranteze rotunde, drepte și acolade, începem cu efectuarea calculelor din parantezele rotunde. După efectuarea acestor calcule, parantezele drepte le transformăm în paranteze rotunde, iar acoladele în paranteze drepte și continuăm efectuarea calculelor din noile paranteze rotunde.

În funcție de ordinea în care se execută, celor cinci operații matematice cunoscute pentru numerele naturale – adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea și ridicarea la putere – li s-a alocat un **ordin**.

Operații	Ordin
Adunarea și scăderea	I
Înmulțirea și împărțirea	II
Ridicarea la putere	III

Dacă un exercițiu conține operații de ordine diferite, se efectuează mai întâi operațiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II și, în final, cele de ordinul I.

6. Descompunerea numerelor naturale (în baza 10)

$$\overline{ab} = a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$$

$$\overline{abc} = a \cdot 10^2 + b \cdot 10^1 + c \cdot 10^0$$

$$\overline{abcd} = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10^1 + d \cdot 10^0$$

unde a, b, c, d sunt cifre, $a \neq 0$.

Observație: Orice număr natural se poate descompune după modelul de mai sus.

7. Divizibilitatea

7.1. Noțiuni generale

Definiție: Un număr natural a este **divizibil** cu b , dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$. Numărul a se numește **multiplu** de b , iar b se numește **divizor** al lui a .

Notatie:	Se citește:
$a : b$	a se divide cu b
sau	
$b \mid a$	b îl divide pe a

Proprietățile divizibilității:

1. Reflexivitatea: $a : a, \forall a \in \mathbb{N}$.
2. Antisimetria: dacă $a : b$ și $b : a$, atunci $a = b, \forall a, b \in \mathbb{N}$.
3. Tranzitivitatea: dacă $a : b$ și $b : c$, atunci $a : c, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
4. $a : 1, \forall a \in \mathbb{N}$.
5. $0 : a, \forall a \in \mathbb{N}$.
6. Dacă $a : b$ și $c : b$, atunci $(a \pm c) : b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
7. Dacă $a : b$, atunci $(a \cdot c) : b, \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.
8. Dacă $a : b$ și $a : c$, atunci $a : (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

7.2. Criterii de divizibilitate

✧ Un număr natural este divizibil cu 2, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este o cifră pară: 0, 2, 4, 6 și 8.

✧ Un număr natural este divizibil cu 5, dacă și numai dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 5.

✧ Un număr natural este divizibil cu 10, dacă și numai dacă ultima cifră este 0.

✧ Un număr natural este divizibil cu 3 (sau 9), dacă și numai dacă suma cifrelor numărului este multiplu de 3 (sau 9).

7.3. Numere prime și numere compuse

Definiții:

◆ Spunem că un număr este **prim** dacă are ca divizori pe 1 și pe el însuși.

◆ Un număr care are mai mult de doi divizori se numește **număr compus**.

Cel mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.)

Definiție: Spunem că d este **cel mai mare divizor comun** a două numere naturale a și b dacă:

a) $d \mid a$;

b) $d \mid b$;

c) orice alt divizor comun d' al acelor numere este divizor și pentru d .

Notatie: $d = \text{c.m.m.d.c.}(a, b) \stackrel{\text{not}}{=} (a, b)$.

Observație: C.m.m.d.c. se află astfel:

I. Se descompun numerele a și b în produs de factori primi.

II. Se înmulțesc factorii primi comuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mici.

Exemplu: Calculăm (300, 225).

$$\text{I. } \begin{array}{r|l} 300 & 2^2 \cdot 5^2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 225 & 5^2 \\ 9 & 3^2 \\ 1 & \end{array}$$

$$225 = 3^2 \cdot 5^2$$

$$\text{II. } (300, 225) = 5^2 \cdot 3 = 75.$$

Definiție: Două numere se numesc prime între ele dacă cel mai mare divizor comun al lor este 1.

Cel mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)

Definiție: Spunem că m este cel mai mic multiplu comun a două numere naturale a și b dacă:

a) $a \mid m$;

b) $b \mid m$;

c) orice alt multiplu comun nenul m' al acelor numere este multiplu al lui m .

Notatie: $m = \text{c.m.m.m.c.}(a, b) = [a, b]$.

Observație: C.m.m.m.c se află astfel:

I. Se descompun numerele a și b în produs de factori primi.

II. Se înmulțesc factorii primi comuni și necomuni, scriși o singură dată, la puterile cele mai mari.

Exemplu: Calculăm [320, 165].

$$\text{I. } \begin{array}{r|l} 320 & 2 \cdot 5 \\ 32 & 2^5 \\ 1 & \end{array}$$

$$320 = 2^6 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r|l} 165 & 11 \\ 15 & 3 \cdot 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$\text{II. } [320, 165] = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 10\,560.$$

Capitolul II

Propoziții și mulțimi

1. Propoziții

Definiție: O propoziție este un enunț care este ori fals ori adevărat.

1.1. Valoarea de adevăr a unei propoziții

Dacă o propoziție este adevărată spunem că ea are valoarea de adevăr „adevărul” și o notăm cu A; dacă o propoziție este falsă spunem că are valoare de adevăr „falsul” și o notăm cu F.

1.2. Propoziții compuse

Dacă p și q sunt două propoziții, atunci putem obține următoarele propoziții compuse:

p și q , p sau q , $\neg p$.

1. p și q

Propoziția p și q este adevărată când propozițiile p și q sunt adevărate.

p	q	p și q
A	A	A
A	F	F
F	A	F
F	F	F

2. p sau q

Propoziția p sau q este adevărată dacă cel puțin una dintre propozițiile p sau q este adevărată.

p	q	p sau q
A	A	A
A	F	A
F	A	A
F	F	F

3. $\neg p$ (se citește non p)

Propoziția $\neg p$ este falsă atunci când p este adevărată și adevărată atunci când p este falsă.

p	$\neg p$
A	F
F	A

2. Mulțimi

2.1. Noțiuni generale

O mulțime este **bine precizată** când se cunosc obiectele din care este constituită.

Dacă A este o mulțime, pentru orice obiect x avem numai una dintre situațiile $x \in A$ sau $x \notin A$, unde $\in$ înseamnă **aparține**, iar $\notin$ înseamnă **nu aparține**.

Observație: Mulțimea fără nici un element se numește **mulțimea vidă** și se notează cu $\emptyset$.

Exemple de mulțimi:

$$A = \{a, b, c, d \mid a, b, c, d \in \mathbb{N}\};$$

$$B = \{1, a, a^2, a^3 \mid a \in \mathbb{N}\};$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

2.2. Cardinalul unei mulțimi

Definiții:

◆ Dacă numărul de elemente al unei mulțimi se poate exprima printr-un număr natural, spunem că mulțimea este **finită**. Dacă nu, atunci spunem că mulțimea este **infinită**.

◆ Numărul natural care exprimă numărul de elemente al unei mulțimi finite se numește **cardinalul mulțimii**.

Notatie: Cardinalul mulțimii A se notează $\text{card}A$ sau $|A|$.

Observație: $|\emptyset| = 0$.

2.3. Relații între mulțimii

Fie A și B două mulțimi.

1. Egalitatea

$A = B$ dacă cele două mulțimi au aceleași elemente.

Se citește: A egal cu B.

2. Incluziunea

$A \subset B$ dacă orice element din A se găsește și în B .

Se citește: A inclus în B.

3. Reuniunea

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

Se citește: A reunit cu B.

4. Intersecția

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$.

Se citește: A intersectat cu B.

5. Diferența

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

Se citește: A fără B.

6. Produsul cartezian

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$.

Capitolul III

Mulțimea numerelor întregi

1. Noțiuni generale

◆ Mulțimea numerelor întregi este

$$\mathbb{Z} = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

$$\diamond \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Avem incluziunea: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.1. Opusul unui număr întreg

Definiție: **Opusul** unui număr întreg a se notează $-a$.

Observație: Dacă $a > 0$, atunci $-a < 0$.

Dacă $a < 0$, atunci $-a > 0$.

1.2. Modulul unui număr întreg

Definiție: **Modulul** sau **valoarea absolută** a unui număr

întreg a este $|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a > 0 \\ 0, & \text{dacă } a = 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$.

Proprietățile modulului:

1. $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{Z}$.

2. $|a| = |-a|, \forall a \in \mathbb{Z}$.

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

4. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \forall a, b \in \mathbb{Z}, \text{ cu } b \neq 0$.

5. $|a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

$$6. |x| = a \Leftrightarrow x = \pm a, \forall a \in \mathbb{Z}^*.$$

$$7. |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \forall a \in \mathbb{Z}^*.$$

$$8. |x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ sau } x \geq a, \forall a \in \mathbb{Z}^*.$$

2. Operații cu numere întregi

2.1. Adunarea

Pentru a aduna două numere întregi procedăm astfel:

I. Dacă numerele au același semn, scriem la rezultat semnul celor două numere și adunăm valorile lor absolute.

II. Dacă numerele sunt de semne contrare, scriem la rezultat semnul numărului care are valoarea absolută mai mare și scădem valoarea absolută mică din valoarea absolută mare.

Proprietățile adunării numerelor întregi:

a) Asociativitatea: $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$

b) Comutativitatea: $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Z}.$

c) Elementul neutru: $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}.$ (Numărul întreg 0 este element neutru pentru adunare.)

2.2. Scăderea

Rezultatul scăderii a două numere întregi este rezultatul adunării descăzutului cu opusul scăzătorului.

$$a - b = a + (-b), \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

2.3. Înmulțirea

Pentru a înmulți două numere întregi procedăm astfel:

I. Dacă numerele au același semn, scriem la rezultat semnul + și înmulțim valorile lor absolute.

II. Dacă numerele nu au același semn, scriem la rezultat semnul – și înmulțim valorile lor absolute.

Regula semnelor la înmulțire:

$$(+)\cdot(+)=(+)\qquad (+)\cdot(-)=(-)$$

$$(-)\cdot(-)=(+)\qquad (-)\cdot(+)=(-)$$

Proprietățile înmulțirii numerelor întregi:

a) Asociativitatea: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$.

b) Comutativitatea: $a \cdot b = b \cdot a, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

c) Elementul neutru: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$. (Numărul întreg 1 este element neutru pentru înmulțire.)

d) $a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a, \forall a \in \mathbb{Z}$.

e) $(-a) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-a) = a, \forall a \in \mathbb{Z}$.

f) Distributivitatea înmulțirii față de adunare:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

g) Distributivitatea înmulțirii față de scădere:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

2.4. Împărțirea

Împărțirea numerelor întregi este asemănătoare cu cea a numerelor naturale și are aceleași proprietăți.

Capitolul IV

Mulțimea numerelor raționale

1. Noțiuni generale. Frații

Definiție: Un raport de numere întregi $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, astfel încât a nu se împarte exact la b este **număr rațional**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\} - \text{mulțimea numerelor raționale.}$$

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}.$$

Avem incluziunile: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Definiție: O expresie de forma $\frac{a}{b}$, cu $a, b \in \mathbb{N}$ și $b \neq 0$, se numește **fracție**. Numărul a se numește **numărător**, numărul b se numește **numitor**, iar raportul $\frac{a}{b}$ este **câtul neefectuat** al împărțirii $a : b$.

Observații:

1. Dacă $\frac{a}{b} > 1$, atunci fracția se numește **supraunitară** și are loc relația $a > b$.

2. Dacă $\frac{a}{b} < 1$, atunci fracția se numește **subunitară** și are loc relația $a < b$.

3. Dacă $\frac{a}{b} = 1$, atunci fracția se numește **echiunitară** și are loc relația $a = b$.

Definiție: Două fracții $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, sunt **echivalente** sau **egale** dacă și numai dacă $a \cdot d = b \cdot c$.

$$\text{Se scrie: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c.$$

2. Amplificarea și simplificarea fracțiilor

Definiții:

◆ **A amplifica** o fracție înseamnă a înmulți și numărătorul și numitorul acesteia cu un număr diferit de 0.

Exemplu: $\frac{5}{3} = \frac{20}{12}$.

◆ **A simplifica** o fracție înseamnă a împărți și numărătorul și numitorul acesteia cu un divizor comun al lor.

Exemplu: $\frac{36}{48} = \frac{3}{4}$.

◆ **Fracția ireductibilă** este o fracție care are numărătorul și numitorul numere prime între ele.

3. Aducerea fracțiilor la același numitor

Pentru a aduce două sau mai multe fracții la **același numitor**, adică la **cel mai mic numitor comun**, procedăm astfel:

1. Aflăm **cel mai mic numitor comun**, care este, de fapt, c.m.m.m.c al numitorilor.

2. Împărțim numitorul comun la numitorul fiecărei fracții și amplificăm fracția respectivă cu câtul obținut.

Exemplu: Aducem la același numitor fracțiile $\frac{3}{25}$, $\frac{7}{18}$ și $\frac{1}{75}$.

$$[25, 18, 75] = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2 = 450$$

$$\frac{^{18)}3}{25}, \frac{^{25)}7}{18}, \frac{^{6)}1}{75} \text{ și obținem } \frac{54}{450}, \frac{175}{450} \text{ și } \frac{6}{450}.$$